**Тема: Комбинаторные задачи. Размещения, перестановки, сочетания.**

1. **Примеры простейших комбинаторных задач.**

**Комбинаторными задачами** принято называть задачи, в которых необходимо подсчитать, сколькими способами можно осуществить то или иное требование, выполнить какое-либо условие, сделать тот или иной выбор.

В комбинаторных задачах всегда необходимо подсчитать число всех подмножеств данного множества, удовлетворяющих определенным условиям, но:

* в одних задачах подмножества, отличающиеся только установленным в них порядком следования элементов, приходится считать различными, такие подмножества называются **упорядоченными подмножествами**;
* в других порядок следования элементов не важен, и подмножества, отличающиеся только расположением элементов, не считаются различными, такие подмножества называются **произвольными подмножествами**.
1. **Размещения и перестановки.**

**Определение**.Пусть имеется множество, содержащее п элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из $k$ элементов, называется размещением из $n$ элементов по $k $элементов.

Из определения вытекает, что $n\geq k\geq 0$ и что размещения из $n$ элементов по $k$ элементов – это все $k-$элементные подмножества, отличающиеся составом элементов или порядком их следования. Отметим, что частный случай $k=0$, т. е. размещение из $n$ элементов по $0$ элементов, дает подмножества $n-$элементного множества, не содержащие элементов, т. е. только пустое множество, обозначают $∅$.

В комбинаторных задачах необходимо уметь подсчитывать число всех размещений из $n$ элементов по $k$ элементов. Для обозначения этого числа применяется специальный символ $A\_{n}^{k}$(читается: «число размещений из $n$ по $k$» или «$a из n по k$»).

**Определение:** Число размещений из $n$ элементов по $k$ элементов равно произведению к последовательных на­туральных чисел от $n$ до $n-k+1$ включительно, т. е.

$$A\_{n}^{k}=n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\cdots \left(n-k+1\right), k>0 (1)$$

**Понятие факториала числа:**

Произведение всех натуральных чисел от $n$ до единицы, обозначать символом $n!$ (читается: «эн факториал»). Используя знак факториала, можно, например, записать:

$$0!=1$$

$$1!=1$$

$$2!=2∙1=2$$

$$3!=3∙2∙1=6$$

$$4!=4∙3∙2∙1=24$$

$$5!=5∙4∙3∙2∙1=120$$

$$6!=6∙5∙4∙3∙2∙1=720$$

Используя понятие факториала числа $n$ формулу для размещения можно записать в виде:

$$A\_{n}^{k}=\frac{n!}{\left(n-k\right)!} (2)$$

Пример 1. Группа учащихся изучает 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий в понедельник, если в этот день недели должно быть 4 различных урока?

Решение. Число способов равно числу размещений из 7 элементов по 4, т. е. равно $A\_{7}^{4}$. По формуле (1), полагая в ней $n=7, k=4$, получаем $A\_{7}^{4}=7∙6∙5∙4=840$.

По формуле (2) находим:

$$A\_{7}^{4}=\frac{7!}{\left(7-4\right)!}=\frac{7!}{3!}=\frac{7∙6∙5∙4∙3!}{3!}=7∙6∙5∙4=840$$

**Определение**. Размещения из $n$ элементов по $n$ элементов называются перестановками из $n$ элементов.

$$A\_{n}^{n}=P\_{n}-перестановки из n эдлементов$$

Из определения следует, что перестановки являются частным случаем размещений. Так как каждая перестановка содержит все $n$ элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов.

Число перестановок из $n$ элементов равно числу всех упорядоченных $n-$элементных подмножеств множества, содержащего $n$ элементов.

**Определение**. Число перестановок из $n$ элементов равно $n!$**:** $P\_{n}=n!$**.**

Пример 2. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются.

Решение: Цифра 5 должна стоять на последнем месте, остальные пять цифр могут стоять в любых местах. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т.е.

$P\_{n}=5!=5∙4∙3∙2∙1=120$**.**

1. **Сочетания.**

**Определение:** Пусть имеется множество, состоящее из $n$ элементов. Каждое его произвольное подмножество, содержащее $k$ элементов, называется сочетанием из $n$ элементов по $k$ элементов.

Число сочетаний из $n$ элементов по $k$ элементов определяется следующей формулой:

$$C\_{n}^{k}=\frac{n!}{\left(n-k\right)!k!} (3)$$

**Определение:** Число сочетаний из $n$ элементов по $k$ элементов равно произведению всех натуральных чисел от $n$ до $n-k+1$ включительно, деленному на $k!$:

$$C\_{n}^{k}=\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\cdots \left(n-k+1\right)}{k!} (4)$$

Свойства сочетаний:

1. $C\_{n}^{k}=C\_{n}^{n-k}$
2. $C\_{n}^{0}=C\_{n}^{n}=1$
3. $C\_{n}^{1}=C\_{n}^{n-1}=n$
4. $C\_{n+1}^{k+1}=C\_{n}^{k+1}+C\_{n}^{k}$

**Пример 3**. Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?

**Решение**. Матчей состоится столько, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, состоящего из 16 элементов, т. е. их число равно $C\_{16}^{2}-$ По формуле (3) находим:

$$C\_{16}^{2}=\frac{16!}{\left(16-2\right)!∙2!}=\frac{16!}{14!∙2!}=\frac{16∙15∙14!}{14!∙2∙1}=120$$

Числа $C\_{n}^{k}$удобно располагать в виде треугольника

$$C\_{0}^{0}$$

$$C\_{1}^{0} C\_{1}^{1}$$

$$C\_{2}^{0} C\_{2}^{1} C\_{2}^{2}$$

$$C\_{3}^{0} C\_{3}^{1} C\_{3}^{2} C\_{3}^{3}$$

В начале и в конце каждой строки будут стоять единицы, так как $C\_{n}^{0}=C\_{n}^{n}=1$, а остальные места могут быть легко последовательно заполнены с помощью свойства (4), которая показывает, что на любом месте (кроме крайних) в любой строке стоит число, равное сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке. Описанная таблица называется **треугольником Паскаля**.

Первые шесть строк треугольника Паскаля выглядят следующим образом:

$$1$$

$$1 1$$

$$1 2 1$$

$$1 3 3 1$$

$$1 4 6 4 1$$

$$1 5 10 10 5 1$$

Закрепление темы:

1. Внимательно изучите теоретический материал;
2. Выполните упражнения.
3. На пять сотрудников выделены три путевки. Сколькими способами их можно распределить, если:

а) все путевки различны,

б) все путевки одинаковы?

1. В группе 30 студентов. Сколькими способами можно выделить двух человек для дежурства, если:

а) один из них должен быть старшим;

б) старшего быть не должно?

1. В классе 38 мест. Сколькими способами можно рассадить в нем 35 учащихся?
2. В розыгрыше первенства по футболу было сыграно 153 матча. Каждые две команды встречались между собой один раз. Сколько команд участвовало в розыгрыше первенства?
3. Вычислите:

$$\frac{P\_{6}\left(C\_{7}^{5}+C\_{7}^{4}\right)}{A\_{10}^{7}}$$

1. Найдите $n$, если:

а) $12C\_{n+3}^{n-1}=55A\_{n+1}^{2}$ б) $12C\_{n}^{1}+C\_{n+4}^{2}=126$

**Пример выполнения задания 6**

$$C\_{n+4}^{n+1}-C\_{n+3}^{n}=15\left(n+2\right)$$

**Решение:**

1. $C\_{n+4}^{n+1}=\frac{\left(n+4\right)!}{\left(n+4-\left(n+1\right)\right)!∙\left(n+1\right)!}=\frac{\left(n+4\right)!}{\left(n+4-n-1\right)!\left(n+1\right)!}=\frac{\left(n+4\right)\left(n+3\right)\left(n+2\right)\left(n+1\right)!}{3!\left(n+1\right)!}=\frac{\left(n+4\right)\left(n+3\right)\left(n+2\right)}{6}$
2. $C\_{n+3}^{n}=\frac{\left(n+3\right)!}{\left(n+3-n\right)!n!}=\frac{\left(n+3\right)\left(n+2\right)\left(n+1\right)n!}{3!n!}=\frac{\left(n+3\right)\left(n+2\right)\left(n+1\right)}{6}$
3. $\frac{\left(n+4\right)\left(n+3\right)\left(n+2\right)}{6}-\frac{\left(n+3\right)\left(n+2\right)\left(n+1\right)}{6}=15\left(n+2\right)$
4. $\left(n+4\right)\left(n+3\right)\left(n+2\right)-\left(n+3\right)\left(n+2\right)\left(n+1\right)=90\left(n+2\right)$
5. $\left(n+2\right)\left(\left(n+4\right)\left(n+3\right)-\left(n+3\right)\left(n+1\right)\right)=90\left(n+2\right)$
6. $n^{2}+7n-n^{2}-4n=90$
7. $3n=90$
8. $n=30$
9. Ответ: $n=30$