**Тема: Комбинаторные задачи. Размещения, перестановки, сочетания.**

1. **Примеры простейших комбинаторных задач.**

**Комбинаторными задачами** принято называть задачи, в которых необходимо подсчитать, сколькими способами можно осуществить то или иное требование, выполнить какое-либо условие, сделать тот или иной выбор.

В комбинаторных задачах всегда необходимо подсчитать число всех подмножеств данного множества, удовлетворяющих определенным условиям, но:

* в одних задачах подмножества, отличающиеся только установленным в них порядком следования элементов, приходится считать различными, такие подмножества называются **упорядоченными подмножествами**;
* в других порядок следования элементов не важен, и подмножества, отличающиеся только расположением элементов, не считаются различными, такие подмножества называются **произвольными подмножествами**.

1. **Размещения и перестановки.**

**Определение**.Пусть имеется множество, содержащее п элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из элементов, называется размещением из элементов по элементов.

Из определения вытекает, что и что размещения из элементов по элементов – это все элементные подмножества, отличающиеся составом элементов или порядком их следования. Отметим, что частный случай , т. е. размещение из элементов по элементов, дает подмножества элементного множества, не содержащие элементов, т. е. только пустое множество, обозначают .

В комбинаторных задачах необходимо уметь подсчитывать число всех размещений из элементов по элементов. Для обозначения этого числа применяется специальный символ (читается: «число размещений из по » или «»).

**Определение:** Число размещений из элементов по элементов равно произведению к последовательных на­туральных чисел от до включительно, т. е.

**Понятие факториала числа:**

Произведение всех натуральных чисел от до единицы, обозначать символом (читается: «эн факториал»). Используя знак факториала, можно, например, записать:

Используя понятие факториала числа формулу для размещения можно записать в виде:

Пример 1. Группа учащихся изучает 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий в понедельник, если в этот день недели должно быть 4 различных урока?

Решение. Число способов равно числу размещений из 7 элементов по 4, т. е. равно . По формуле (1), полагая в ней , получаем .

По формуле (2) находим:

**Определение**. Размещения из элементов по элементов называются перестановками из элементов.

Из определения следует, что перестановки являются частным случаем размещений. Так как каждая перестановка содержит все элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком элементов.

Число перестановок из элементов равно числу всех упорядоченных элементных подмножеств множества, содержащего элементов.

**Определение**. Число перестановок из элементов равно **: .**

Пример 2. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются.

Решение: Цифра 5 должна стоять на последнем месте, остальные пять цифр могут стоять в любых местах. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т.е.

**.**

1. **Сочетания.**

**Определение:** Пусть имеется множество, состоящее из элементов. Каждое его произвольное подмножество, содержащее элементов, называется сочетанием из элементов по элементов.

Число сочетаний из элементов по элементов определяется следующей формулой:

**Определение:** Число сочетаний из элементов по элементов равно произведению всех натуральных чисел от до включительно, деленному на :

Свойства сочетаний:

**Пример 3**. Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?

**Решение**. Матчей состоится столько, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, состоящего из 16 элементов, т. е. их число равно По формуле (3) находим:

Числа удобно располагать в виде треугольника

В начале и в конце каждой строки будут стоять единицы, так как , а остальные места могут быть легко последовательно заполнены с помощью свойства (4), которая показывает, что на любом месте (кроме крайних) в любой строке стоит число, равное сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке. Описанная таблица называется **треугольником Паскаля**.

Первые шесть строк треугольника Паскаля выглядят следующим образом:

Закрепление темы:

1. Внимательно изучите теоретический материал;
2. Выполните упражнения.
3. На пять сотрудников выделены три путевки. Сколькими способами их можно распределить, если:

а) все путевки различны,

б) все путевки одинаковы?

1. В группе 30 студентов. Сколькими способами можно выделить двух человек для дежурства, если:

а) один из них должен быть старшим;

б) старшего быть не должно?

1. В классе 38 мест. Сколькими способами можно рассадить в нем 35 учащихся?
2. В розыгрыше первенства по футболу было сыграно 153 матча. Каждые две команды встречались между собой один раз. Сколько команд участвовало в розыгрыше первенства?
3. Вычислите:
4. Найдите , если:

а) б)

**Пример выполнения задания 6**

**Решение:**

1. Ответ: