**Метод интервалов**

**Метод интервалов** (или как его еще иногда называют метод промежутков) – это универсальный метод решения неравенств. Он подходит для решения разнообразных неравенств, однако наиболее удобен в решении *рациональных неравенств* с одной переменной

## Алгоритм метода интервалов

Если неравенство имеет вид f(x)<0 (а также f(x) > 0 или f(x) ≤ 0 или f(x) ≥0), то его удобно решать методом интервалов. Для наглядности приведем примеры подобных неравенств: (x−7)·(x+7) ≤ 0 или

(x+4)·(x2−x+1)·(x+2)3 ≥ 0 или $\frac{\left(х-2\right)∙(х+5)}{х + \sqrt{3}}$ > 0 или $\frac{\left( х^{2}+2х+7\right)∙(х-1)^{2}}{(х^{2} -7)^{5}∙(х-1)∙(х-3)^{7}} $≤ 0 и т. д.

Перейдем к **алгоритму** решения неравенств подобного вида методом интервалов, а затем рассмотрим примеры его применения к решению неравенств. Итак, **алгоритм** метода интервалов:

1. Сначала **находят нули каждого множителя**, а если в левой части неравенства – дробь, то находят **нули числителя и нули знаменателя**. (Нули числителя и знаменателя – это значения переменной, при которых числитель и знаменатель становятся равными нулю ). Для этого ***каждый множитель левой части (числитель и знаменатель) приравнивают к нулю, и решают полученные уравнения.***

**\*Примечание. Важно понимать, что нулями каждого множителя левой части (нулями числителя и знаменателя) могут быть любые числа, среди которых может отсутствовать число 0.**

1. **На числовую прямую наносят точки, соответствующие найденным в пункте 1) нулям.** (Не обязательно соблюдать единичные отрезки, достаточно придерживаться известного правила: точка с меньшей координатой находится левее точки с большей координатой). После этого определяют, как их надо изобразить: темными или светлыми (выколотыми). При решении строгого неравенства (со знаком < или >) все точки изображаются светлыми (выколотыми). ***При решении нестрогого неравенства*** *(со знаком ≤ или ≥)* ***точки, отвечающие нулям знаменателя, изображаются выколотыми****,* ***а оставшиеся отмеченные точки – темными.*** Все отмеченные точки разбивают координатную прямую на несколько числовых промежутков.
2. **Определяют знаки выражения f(x) из левой части решаемого неравенства на каждом промежутке** (как это делается, подробно расскажем в одном из следующих пунктов), и над ними проставляются + или − в соответствии с определенными знаками.
3. Наконец, при решении неравенства со знаком < или ≤ штриховку наносят над промежутками, отмеченными знаком «− », а при решении неравенства со знаком > или ≥ – над промежутками, отмеченными знаком «+». В результате получается геометрическое представление числового множества, которое и является искомым решением неравенства.

## На чем основан метод интервалов?

В основе метода интервалов лежит следующее свойство непрерывной функции: если на интервале (*a, b*) функция f(х) непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак. Аналогичное свойство справедливо и для числовых лучей (−∞, *a*) и (*a*, +∞). Для выражений f(x), имеющих указанный в предыдущем пункте вид, постоянство знака на промежутках можно обосновать и иначе, с помощью свойств числовых неравенств с учетом правила умножения и деления чисел с одинаковыми знаками и разными знаками.

## Как находить нули числителя и знаменателя?

С нахождением нулей числителя и знаменателя дроби обычно не возникает никаких проблем. Выражения из числителя и знаменателя приравниваются к нулю, и решаются полученные уравнения. При необходимости выполняют *разложение на множители* числителя и знаменателя.

Рассмотрим пример. Решить неравенство: $\frac{(х-5)^{3}}{(х^{2}+5х-6)(х^{2}- 25)}$ ≤ 0

 Решение.

Преобразуем левую часть неравенства. Для этого разложим на множители

 $(х^{2}+5х-6) и \left(х^{2}- 25\right).$

х2 + 5х – 6 = 0

D = 52 – 4 ∙ 1 ∙ (– 6) = 25 + 24 = 49

х1 = $\frac{- 5-7}{2}$ = – 6

х2 = $\frac{- 5+7}{2}$ = 1

Применяя формулу ***ax2 + bx + c = a(x – x1)(x – x2)***, получим: х2 + 5х – 6 = (х + 6)(х – 1). Кроме того, по формуле разности квадратов $х^{2}- 25$ = (х – 5)(х + 5). Неравенство примет вид:

$\frac{(х-5)^{3}}{\left(х+6\right)\left(х-1\right)\left(х- 5\right)(х+5)}$ ≤ 0, после сокращения на х – 5 окончательно получаем:$ \frac{(х-5)^{2}}{\left(х+6\right)\left(х-1\right)(х+5)}$ ≤ 0

Нули числителя и знаменателя:

(х – 5)2 = 0 х + 6 = 0 х – 1 = 0 х + 5 = 0

(х – 5)(х – 5) = 0 х = – 6 х = 1 х = – 5

х = 5 или х = 5

При решении уравнения (х – 5)2 = 0 получились два одинаковых корня, равных 5. В таких случаях говорят: «Кратность корня 5 равна двум». Как влияет такая ситуация на решение неравенства рассмотрим на следующем этапе. А пока нанесем полученные числа на числовую прямую слева направо в порядке возрастания: -6, -5, 1. 5. Точки, соответствующие числам -6, -5, 1, - выколотые, т.к. они обращают знаменатель в ноль, а на ноль делить нельзя. Точка с координатой 5 будет темной, т.к. при х=5 числитель обратится в ноль, а поскольку мы решаем нестрогое неравенство, то такое значение допустимо.

## Как определять знаки на интервалах?

Знаки левой части неравенства на каждом интервале можно определять двумя способами. Самый надежный способ состоит в следующем. Из каждого интервала выбирают произвольное число и вычисляют значение левой части неравенства. Знак полученного результата – это и есть знак левой части на выбранном интервале. Вернемся к неравенству. Найденные числа разбили числовую прямую на интервалы (–∞; – 6), (– 6;. – 5), (– 5; 1), (1; 5), (5; +∞). Определим знак дроби $\frac{(х-5)^{2}}{\left(х+6\right)\left(х-1\right)(х+5)}$ на каждом интервале.

Из интервала (–∞; – 6) выберем число – 7. Подставим его вместо х и определим знак результата:

$\frac{(-7-5)^{2}}{\left(-7+6\right)\left(-7-1\right)(-7+5)}$ = $\frac{\left(-12\right)^{2}}{-1∙\left(-8\right)∙(-2)}$. Получаем отрицательное число. Значит, на интервале (–∞; – 6) знак дроби «–».

Из интервала (– 6; – 5) выберем число – 5,5. Снова определим знак:

$\frac{(-5,5-5)^{2}}{\left(-5.5+6\right)\left(-5.5-1\right)(-5,5+5)} $=$ \frac{(-10,5)^{2}}{0,5∙\left(-6,5\right)∙(-0,5)}$. Очевидно, в ответе получится положительное число. Поэтому на интервале (– 6; – 5) знак дроби «+».

Из интервала (– 5; 1) выберем число 0. $\frac{(0-5)^{2}}{\left(0+6\right)\left(0-1\right)(0+5)}$ = $\frac{(-5)^{2}}{6∙\left(-1\right)∙5}$ . Результат отрицателен. На интервале (– 5; 1) знак дроби «–».

Из интервала (1; 5) выберем число 2, $\frac{(2-5)^{2}}{\left(2+6\right)\left(2-1\right)(2+5)}$ = $\frac{9}{56}$. На интервале (1; 5) знак дроби «+».

Из интервала (5; +∞) выберем число 6, $\frac{(6-5)^{2}}{\left(6+6\right)\left(6-1\right)(6+5)} $=$ \frac{1}{12∙5∙11}$. На интервале (5; +∞) знак дроби «+».

Существует и другой подход к определению знаков, состоящий в нахождении знака на одном из интервалов и его сохранении или изменении при переходе к соседнему интервалу через нуль. Нужно придерживаться следующего правила. При переходе через нуль числителя (или знаменателя) знак изменяется, если степень выражения, дающего этот нуль, нечетная, и не изменяется, если четная. Кстати, если выражение в левой части неравенства имеет вид $\frac{(х-5)^{2}}{\left(х+6\right)\left(х-1\right)(х+5)}$ , то на крайнем правом промежутке будет знак плюс. В данном примере знак будет меняться при переходе через нули знаменателя, т. е. при переходе через – 6, – 5, и 1, т.к. каждый множитель в знаменателе имеет первую (нечетную) степень. При переходе через точку 5, являющуюся нулем числителя, знак меняться не будет, т. к. выражение в числителе имеет четную степень. В этом мы смогли убедиться, определяя знак дроби выше.

## Как правильно записать ответ?

Неравенство $\frac{(х-5)^{3}}{(х^{2}+5х-6)(х^{2}- 25)}$ ≤ 0, которое мы привели к виду$ \frac{(х-5)^{2}}{\left(х+6\right)\left(х-1\right)(х+5)}$ ≤ 0, содержит знак ≤ , поэтому в ответ будут записаны интервалы, на которых дробь отрицательна, т.е. (–∞; – 6), (– 5; 1). Кроме того, при х=5 (изолированная точка) неравенство верно и поэтому число 5 – одно из решений неравенства. Однако, это значение может быть потеряно в связи с тем, что расположено между двумя интервалами, не входящими в ответ. Подводя итоги, записываем

**ответ:**  (–∞; – 6) ⋃ (– 5; 1) ⋃ $\{5\}$ .

**Пример 2**

Решите неравенство $\frac{х-5}{х+1 }$ > 0.

Решение:

найдем нули числителя и знаменателя.

 х – 5 = 0 х + 1 = 0

х = 5 х = – 1

Точки, соответствующие нулям числителя и знаменателя, изображаем выколотыми (светлыми) в силу того, что неравенство строгое. Полученные числа разбивают числовую прямую на три промежутка (−∞, −1), (−1, 5) и (5, +∞). Определим знак дроби $\frac{х-5}{х+1 }$ на каждом из этих промежутков. На промежутках (−∞, −1) и (5, +∞) дробь $\frac{х-5}{х+1 }$ положительна, а на интервале (−1, 5) отрицательна. В ответ записываем промежутки со знаком плюс.

Ответ: (−∞, −1) ⋃ (5, +∞).

**Пример 3**

Решите неравенство $\frac{х^{2}- х + 4}{х +3}\geq 0$. Так как при решении квадратного уравнения х2 – х + 4 = 0 дискриминант отрицателен, то нулей числителя нет, а нулем знаменателя является число −3. (числитель этой дроби положителен при любом х, т. к. парабола у = х2 – х + 4, ветви которой направлены вверх, не пересекает ось абсцисс). Число −3 делит числовую прямую на два промежутка (−∞, −3) и (−3, +∞). Определим знаки на них. Очевидно, что справа от – 3 знак будет положительным, а слева от – 3 – отрицательным. Так как неравенство имеет знак $\geq $, то в ответ записываем промежуток со знаком +. Ответ: (−3, +∞).

**Примеры решения неравенств методом интервалов**

1. **Решить неравенство** (*x* + 1)(*x* – 1)(*x* – 2) > 0.

|  |  |
| --- | --- |
| 1)  | Первый шаг решения уже выполнен: левая часть неравенства полностью разложена на линейные множители. |
| 2)  | Находим (устно) корни линейных множителей и наносим их на числовую ось. Три корня *x*1 = –1, *x*2 = 1, *x*3 = 2 разбивают числовую ось на четыре промежутка:(–∞ ; –1), (–1; 1), (1; 2), (2; +∞ ).Возьмем один из множителей, например, *x* – 1. Линейная функция *y* = *x* – 1 меняет свой знак при переходе через корень *x* = 1. Если рассматриваемый промежуток этого корня не содержит, то функция сохраняет постоянный знак на этом промежутке. Это объясняет, почему произведение линейных функций *y* = (*x* + 1)(*x* – 1)(*x* – 2) сохраняет постоянный знак на каждом промежутке, не содержащем корней ни одного из множителей. |
| 3)  | Определяем знаки. Это можно сделать по-разному. Проще всего начать справа. При *x* > 2 (то есть правее самого большого корня) все множители положительны. Следовательно, все произведение положительно. При переходе справа налево через один корень ровно один множитель будет менять знак. Следовательно, знаки будут чередоваться. Надпишем их над промежутками. |
| 4)  | Запишем ответ, выбрав промежутки, соответствующие решаемому неравенству.Ответ: (–1; 1)  (2; +∞). |

2. **Решить неравенство:** $\frac{x^{3}-4x}{9-x^{3}}\geq 0$

|  |  |
| --- | --- |
| 1)  | Начинаем с преобразования левой части:$ \frac{x^{3}-4x }{9-x^{2}}=\frac{x(x^{2}-4) }{-(x^{2}-9)}=-\frac{x\left(x-2\right)(x+2)}{\left(x-3\right)(x+3)}$Меняем знак неравенства: $\frac{x\left(x-2\right)(x+2)}{\left(x-3\right)(x+3)}\leq 0$Обратите внимание на то, что полезно так изменить знаки, чтобы коэффициенты при *x* в линейных множителях стали положительными. |
| 2)  | Наносим нули числителя и знаменателя на числовую ось, отмечая их темными или светлыми точками.5 корней разбили ось на 6 промежутков. |
| 3)  | Отмечаем знаки справа налево. |
| 4)  | Прежде чем выписывать ответ, заметим, что мы решаем *нестрогое* неравенство, поэтому корни числителя надо включать в ответ, а корни знаменателя нет.Ответ: (–∞; –3)   [–2; 0]   [2; 3). |

**3. Решить неравенство** $\frac{\left(x-1\right)(2x^{2}+x-3)}{\left(x+2\right)^{³}(x+1)} \leq 0.$

|  |  |
| --- | --- |
| 1)  | Находим корни квадратного трехчлена 2*x*2 + *x* – 3 = 0, *x*1 = 1, *x*2 = – $\frac{3}{2}$. $Раскладываем левую часть на множители: \frac{\left(x-1\right)\left(2x^{2}+x-3\right) }{\left(x+2\right)^{3}(x^{ }+1)}=\frac{2\left(x-1\right)\left(x-1\right)(x+\frac{3}{2})}{\left(x+2\right)^{3}(x^{ }+1)} $Записываем неравенство (освободившись от положительного множителя 2):$$\frac{\left(x-1\right)²(x+\frac{3}{2})}{\left(x+2\right)^{3}(x^{ }+1)}\leq 0$$В этом примере есть новый момент – в числителе среди линейных множителей появились одинаковые.  |
| 2)  | Наносим нули числителя и знаменателя на числовую ось. |
| 3)  | Начинаем двигаться справа налево, однако нельзя автоматически менять знак при переходе через корень. Дело в том, что если некоторое число является корнем нескольких одинаковых множителей, то знак поменяется или нет в зависимости от того, нечетно или четно число этих множителей (ведь каждый из них должен поменять знак). В нашем примере число *x* = 1 является корнем *двух* множителей (и при переходе через него знак не изменится), а число *x* = –2 – корень *трех* множителей (знак изменится).Расставляем знаки. |
| 4)  | Записываем ответ. Обратите внимание, что в него войдет изолированная точка *x* = 1.Ответ: $\left(-\infty ;-2\right)∪\left[-\right.\frac{3}{2};\left.-1\right)∪\left\{1\right\}$ ,  |

4. **Решить неравенство** $\frac{x^{2}-8}{x-2} <1$.

|  |  |
| --- | --- |
| 1)  | Чтобы привести его к стандартному рациональному неравенству, надо перенести число 1 из правой части в левую и преобразовать. Не пытайтесь освободиться от знаменателя!$$\frac{x^{2}-8}{x-2}-1 <0\leftrightarrow \frac{x^{2}-8-x+2}{x-2}<0\leftrightarrow \frac{x^{2}-x-6 }{x-2}<0\leftrightarrow \frac{\left(x+2\right)\left(x-3\right)}{x-2}<0$$ |
| 2)  | Наносим нули числителя и знаменателя на прямую. |
| 3)  | Расставляем знаки. |
| 4)  | Записываем ответ.Ответ: (–∞ ; –2)  (2; 3). |

 **НА ПРОВЕРКУ ПРИСЛАТЬ ЗАДАНИЯ ИЗ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ, НОМЕР ВАРИАНТА СООТВЕТСТВУЕТ НОМЕРУ В РАПОРТИЧКЕ.**

**ЗАДАНИЯ ПРИСЛАТЬ ДО 14:00, ВСЕ , ЧТО ПОСЛЕ, ОЦЕНКА 3.**